Programme de colle - Semaine n° 13: du 13/01/2025 au 17/01/2025

Connaissances minimales attendues

Chapitre 8 - Intégration (Rappels et compléments)

Se reporter à un programme de colle précédent.

Chapitre 9 - Couples de variables aléatoires discrètes

- Sommes doubles finies *standard*, sommes doubles finies triangulaires ;
- **(HP)** Série double convergente (sommabilité d'une famille de réels indexée par $\mathbb{N}^2$), un résultat d'interversion des symboles $\sum\limits_{i=0}^{+\infty}$ et $\sum\limits_{j=0}^{+\infty}$ dans le contexte des séries doubles convergentes) ;
- Couple de variables aléatoires discrètes ;
- Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires discrètes, $\{[X = x] \cap [Y = y],\ (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)\}$ est un système complet d'événements ;
- Loi (conjointe) d'un couple de variables aléatoires discrètes ;
- Lois marginales d'un couple de variables aléatoires discrètes : définition et détermination à l'aide de la formule des probabilités totales et de la loi conjointe ;
- Loi conditionnelle de X sachant $[Y = y]$ (où (X, Y) est un couple de variables aléatoires discrètes et $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(Y = y) \neq 0$) ;
- Indépendance de deux variables aléatoires discrètes ;
- Indépendance mutuelle d'une famille au plus dénombrable de variables aléatoires discrètes ;
- Lemme des coalitions : « version basique », « versions évoluées » ;
- Transformée $g(X, Y)$ d'un couple (X, Y) de variables aléatoires discrètes : définition et exemples ;
- Transformée d'un n-uplet de variables aléatoires discrètes : définition et exemples ;
- Loi de $g(X, Y)$: formules (avec somme double) dans le cas général, puis dans le cas de l'indépendance de X et de Y. Étude approfondie des cas particuliers classiques : $X + Y$, XY, $\min(X, Y)$ et $\max(X, Y)$;
- Stabilité de la loi de Poisson pour la somme : si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ et si X et Y sont indépendantes, alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$;
- Stabilité de la loi binomiale pour la somme : si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n_2, p)$ et si X et Y sont indépendantes, alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$;
- Généralisation des propriétés de stabilité pour la somme explicitées au niveau des deux points précédents à m variables aléatoires $X_1, \ldots, X_m$ $(m \in \mathbb{N}^*)$;
- Toute variable aléatoire s'écrivant comme la somme de n variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre p suit la loi binomiale de paramètres (n, p).

- Théorème de transfert (dans le contexte des transformées de couples de variables aléatoires discrètes) ;
- Espérance de XY où (X, Y) est un couple de variables aléatoires discrètes.
  Cas particulier **(HP)** où X et Y suivent chacune une loi de Bernoulli ;
- Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes admettant chacune une espérance, alors XY admet une espérance et $E(XY) = E(X)E(Y)$.
  Généralisation à un produit $\prod_{k=1}^{n} X_k$ de variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes admettant chacune une espérance ;
- Propriété de linéarité de l'espérance ;
- Propriété de croissance de l'espérance ;

Savoir-faire et Méthodes à savoir appliquer

« Les incontournables »

- Calculer une somme double finie *standard*, une somme double finie *triangulaire*, et, de manière guidée, la somme double d'une série double convergente ;
- Déterminer la loi conjointe d'un couple de variables aléatoires discrètes ;
- Déterminer les lois marginales d'un couple de variables aléatoires discrètes à partir de sa loi conjointe, ou à partir de lois conditionnelles ;
- Montrer que deux variables aléatoires discrètes X et Y sont indépendantes :
  * ... en utilisant le protocole de l'expérience aléatoire (indépendance *a priori*) ;
  * ... en utilisant la loi conjointe et les lois marginales du couple (X, Y) (indépendance *a posteriori*).
- Montrer que deux variables aléatoires discrètes ne sont pas indépendantes :
  * ... en revenant à la définition de l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes et « en chassant 0 dans le tableau de la loi conjointe » du couple (X, Y) ;
  * ... en montrant que l'on dispose de $y \in Y(\Omega)$ tel que la loi de X sachant $[Y = y]$ n'est pas la loi de X ;
  * ... en montrant que l'on dispose de $(y_1, y_2) \in Y(\Omega)^2$ tel que la loi de X sachant $[Y = y_1]$ n'est pas la loi de X sachant $[Y = y_2]$;
  * ... en montrant que X, Y et XY possèdent une espérance vérifiant : $E(XY) \neq E(X)E(Y)$;
- Déterminer / identifier une loi conditionnelle ;
- Déterminer la loi de $X + Y$, XY, $\max(X, Y)$, de $\min(X, Y)$ où X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes de même loi ;
- Calculer l'espérance d'une variable aléatoire $g(X, Y)$ à l'aide du théorème de transfert
- Calculer $E(XY)$ si X et Y sont indépendantes ;
- Calculer l'espérance d'une combinaison linéaire de variables aléatoires discrètes admettant une espérance ;

« Et plus si affinités ... »

- Montrer des résultats théoriques généraux utilisant les notions du chapitre 8 et 9 ;
- Manipuler la convergence d'une série double d'une famille de réels indexée par $\mathbb{N}^2$;
- Étude non guidée de transformées de couples de variables aléatoires discrètes.

Preuves exigibles

Propositions

1. Critère de comparaison par inégalité dans le contexte de l'intégration généralisée de fonctions positives **[A]** ;
2. Critère de comparaison par négligeabilité dans le contexte de l'intégration généralisée de fonctions positives **[A]** ;
3. Critère de comparaison par équivalence dans le contexte de l'intégration généralisée de fonctions positives **[A]** ;
4. Convergence de l'intégrale de Gauss **[A]** ;
5. Critère de convergence des intégrales de Riemann dont l'impropreté est envisagée en $+\infty$ **[A]** ;
6. Critère de convergence des intégrales impropres en $+\infty$ $\int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)\,\mathrm{d}t$ **[A]** ;
7. Propriété de croissance de l'intégration généralisée en $+\infty$ **[A]** ;
8. **(HP)** Comparaison « Série-Intégrale » : la proposition complète **[A]** ;
9. Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$, alors X admet une espérance et $E(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k)$ (2 méthodes exigibles, dont l'une reposant sur la manipulation d'une somme double finie triangulaire) **[C]** ;
10. Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ et si X et Y sont indépendantes, alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$ **[C]** ;
11. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n_2, p)$ et si X et Y sont indépendantes, alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$ (avec la formule de Vandermonde dont on pourra demander des éléments de preuve) **[A]** ;
12. Si $X_1, \dots, X_m$ sont m variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant respectivement la loi de Poisson de paramètre $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, alors $\sum_{k=1}^{m} X_k$ suit la loi de Poisson de paramètre $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k$ **[C]** ;
13. Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes possédant une espérance, alors XY possède une espérance et $E(XY) = E(X)E(Y)$ (preuve exigible uniquement dans le cas où X et Y sont finies) **[A]** ;
14. Si $X_1, \dots, X_n$ sont n variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes possédant toutes une espérance, alors $\prod_{k=1}^{n} X_k$ possède une espérance et $E\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right) = \prod_{k=1}^{n} E(X_k)$ **[A]** ;
15. **(HP)** Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé suivant chacune une loi de Bernoulli, alors XY admet une espérance de valeur $\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 1])$ **[C]** ;

Exemples/ exercices

1. L'intégrale $\int_0^{+\infty} te^{-t}dt$ converge de valeur 1 **[C]**.

2. Convergence et valeur de l'intégrale $\int_0^1 \ln(t)dt$ **[C]**.

3. Nature de $\int_0^1 \frac{1}{t-1}dt$ **[C]**.

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}dt = \ln(2)$ **[TD]**.

5. $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ \int_0^1 x^p(1-x)^q dx = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$ **[TD]**.

6. (**Formule de Taylor avec reste intégrale**) **[TD]** :
   Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
   Soit $(a,b) \in I^2$.
   Soit f une fonction de la variable réelle à valeurs réelles, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.
   Alors :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n dt$$

7. (**Inégalité de Taylor-Lagrange**) **[TD]** :
   Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
   Soit $(a,b) \in I^2$.
   Soit f une fonction de la variable réelle à valeurs réelles, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ est bornée sur I.
   Si on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_n un majorant de $\left|f^{(n)}\right|$ sur I , alors :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leqslant \frac{M_{n+1}|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

8. Calcul, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, de $\sum\limits_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \binom{j}{i}$. **[C]**

9. Une urne contient trois boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 3. On effectue 2 tirages successifs sans remise dans cette urne. Déterminer la loi conjointe du couple (X,Y) où X désigne le premier numéro tiré et Y le deuxième numéro tiré.
   * Loi conjointe du couple (X,Y) **[C]**
   * Lois marginales du couple (X,Y) **[C]** .
   * Étude de l'indépendance de X et de Y **[C]**.

10. On lance deux fois un dé cubique standard. Déterminer la loi conjointe du couple (X,Y) où X désigne le nombre de 1 obtenu(s) et Y le nombre de 2 obtenu(s) **[C]**.

11. Loi de $X+Y$ où X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivantes toutes les deux la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ **[C]** ;

12. Loi de $\max(X, Y)$ où X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivantes toutes les deux la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ **[C]** ;

13. Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et si X et Y sont indépendantes, alors $\min(X, Y) \hookrightarrow \mathcal{G}\left(1-(1-p)^2\right)$ **[C]**.

[A] : Annexe **Preuves** ;
[C] : Preuve traitée au tableau **en cours** ;
[Ac] : Annexe **Corrections**
[TD] : Travaux Dirigés

Informatique

Tout le contenu des polycopiés :

- **TP1 - Cours (rappels)** et **TP1 - Exercices**
- **TP2 - Algorithmique de listes (rappels)** [calcul du (second) minimum (et indices associés), (second) maximum (et indices associés), des valeurs les plus proches (et indices associés), recherche dichotomique dans une liste triée, algorithmes gloutons (« plus grand nombre », « déplacement d'une grenouille », rendu de monnaie, problème des conférenciers), algorithmes de tri **(HP)** (tri-bulles et tri-par-insertion)].
- **TP3 - Calculs numériques** [algorithme de dichotomie, méthode de point fixe, méthode de Newton-Raphson **(HP)**, méthode des rectangles permettant le calcul approché d'une intégrale sur un segment**(HP)**, application au calcul des valeurs approchées des valeurs prises par la fonction de répartition de toute variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$ **(HP)**].
- **TP4 - Graphes (rappels)** [révision du vocabulaire et des théorèmes du programme, représentation d'un graphe avec Python (matrice numpy d'adjacence, liste des listes d'adjacence, dictionnaire), fonctions de conversion d'une représentation à une autre, divers exercices de manipulation de graphes (ordre, nombre d'arêtes, caractère adjacent de deux sommets, voisinage, degré, caractère isolé d'un sommet, caractère simple, complet, eulérien d'un graphe, calcul du nombre de chaînes reliant deux sommets donnés, calcul des distances combinatoires à un sommet dans un graphe simple, calcul de l'excentricité, du diamètre d'un graphe, algorithme de Dijkstra (calcul d'une chaîne de poids minimal)].
- **TP5 - Simulation d'expériences aléatoires - le cas discret (rappels et compléments)** [diagramme en bâtons (`bar`), la fonction `unique` (**(HP)**, à savoir donc implémenter à la main), matrices de booléens (pour compter le nombre de coefficients d'un tableau `numpy` vérifiant une contrainte donnée), les fonctions `random`, `randint`, `binomial`, `geometric`, `poisson` de la sous-bibliothèque `random` de la bibliothèque `numpy`, méthode de Monte-Carlo (estimation d'une espérance (moments, espérance de transformées), d'une probabilité, ...), divers exercices (tirages avec remise, sans remise, selon un protocole plus « exotique », marches aléatoires, graphes aléatoires d'Erdös-Renyi (estimation du nombre d'arêtes, du nombre de sommets isolés, de la probabilité qu'il soit connexe, etc))]

sont au programme de cette semaine (y compris toutes les extensions hors-programme **(HP)**).
On pourra proposer aux étudiants des questions de cours d'informatique et/ou des exercices, en s'inspirant très fortement des exercices présents dans les polycopiés susmentionnés.

Quelques remarques destinées aux colleurs

- La colle commencera par quelques questions de cours (restitution d'une définition, d'une proposition/théorème, d'une ou des méthodes de base) ;
- On pourra demander aux élèves de prouver un des théorèmes (de manière complète ou incomplète) répertoriés dans la rubrique **Preuves exigibles** et tester la compréhension des élèves à propos de ce qu'ils écrivent ;
- On évitera autant que possible de consacrer plus d'une demi-heure aux questions de cours ;
- Les exercices proposés devront être de niveau progressif ;
- On accordera un soin tout particulier à la rédaction et à la rigueur ;
- Toute erreur répertoriée dans le document Erreurs graves sera lourdement sanctionnée ;
- Si l'élève interrogé ne répond pas correctement aux questions de cours, on attribuera une note strictement inférieure à la moyenne, et ce indépendamment de la suite de l'interrogation orale.